MPSI1

Avril-Mai 2025

Séries numériques



Figure 1 – Georg Friedrich Bernard Riemann, mathématicien allemand, 1826-1866

Matteo Miannay

Table des matières

1 Introduction aux séries numériques **2**

1.1 But . . . 2
1.2 Notion de série, nature d'une série . . . 2
1.3 Notion de convergence . . . 2
1.4 Reste d'une série qui converge . . . 3
1.5 Lien suite série . . . 3
1.6 Des propriétés qui font sens . . . 4

2 Le cas des séries à termes positifs **4**

2.1 Les séries à termes positifs . . . 4
2.2 Comparaison des séries à termes positifs . . . 5
2.3 Convergence absolue . . . 5
2.4 Règle de d'Alembert . . . 6

3 Séries alternées **6**

4 Comparaison série intégrale **7**

4.1 But . . . 7
4.2 Méthode . . . 8
4.3 Des exemples . . . 8

5 Séries de référence **8**

6 Utilisation d'une série pour l'étude d'une suite **9**

6.1 Premiers résultats . . . 9
6.2 Formule de Stirling . . . 9
6.3 Exercice : Théorème de point fixe . . . 9
6.4 Développement décimal d'un nombre réel . . . 9

7 Compléments **10**

7.1 Les séries de Bertrand . . . 10
7.2 Comparaison à $\frac{1}{n}$ . . . 10
7.3 Règle de Raabe-Duhamel . . . 10
7.4 Sommation des relations de comparaison (programme MP) . . . 11
7.5 Transformation d'Abel . . . 11
7.6 Vers les séries de fonctions et les fonctions spéciales : les fonctions ζ et η . . . 12

1 Introduction aux séries numériques

1.1 But

Ce cours est une première introduction à la notion de séries : on cherche à donner un sens à la quantité $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Cette année, nous nous contenterons du cas où (u_n) est une suite de réels, ou de complexes. L'année prochaine, vous vous intéresserez au cas (u_n) est une fonction, (u_n) à valeurs dans un espace vectoriel normé... Dans toute la suite, (u_n) et (v_n) désigneront des suites à valeurs complexes ou réelles. De plus, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.2 Notion de série, nature d'une série

Définition 1 (Série de terme général (u_n), somme partielle)**.**
1. *On appelle série de terme général (u_n), où $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ la suite $S = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On la note en général $\sum u_n$, ou encore $\sum_{n\geq 0} u_n$.*
2. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle S_n la n-ème somme partielle de $\sum u_n$.*

En d'autre mots, S est la suite donnée par récurrence par $S_0 = u_0$, et $S_n = S_{n-1} + u_n$ pour $n \geq 1$. La définition s'étend bien entendu à une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$.

1.3 Notion de convergence

Définition 2 (Convergence, divergence, somme)**.**
1. *On dit que la série de terme général (u_n) converge lorsque la suite de ses sommes partielles converge.*
2. *Autrement, on dit qu'elle diverge.*
3. *Quand elle converge, on note sa limite $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, et on appelle cette quantité* ***somme de la série de teme général*** (u_n).
4. *On parle de "nature de la série" quand on parle de sa convergence ou de sa divergence.*

Remarque 3 (Attention)**.** *Les objets $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sont radicalement différents. L'un est un nombre, et on ne peut l'écrire que si la série converge, l'autre est un "concept" : une série, et on peut toujours l'écrire. Attention donc à respecter l'homogénéité de vos formules, ce sans quoi la prof de physique sera prévenue.*

Remarque 4. *La grande question du chapitre sur les suites était : à quelle condition la suite (u_n) converge ? Ici, nous nous demanderons : à quelle condition sur la suite (u_n) la série $\sum u_n$ a un sens ?*

Exemple 5. *Déterminer les sommes partielles et la nature des séries suivantes :* $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$, $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$, $\sum_{n\geq 0}q^n$ *(série géométrique),* $\sum_{n\geq 0}n$, $\sum_{n\geq 1}\ln(1+\frac{1}{n})$

1.4 Reste d'une série qui converge

Propriété 6. *Les séries* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *sont de même nature. De plus, en cas de convergence on a :* $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\sum_{n=0}^{n_0-1}u_n+\sum_{n=n_0}^{+\infty}u_n$.

Définition 7. *Soit* $\sum u_n$ *une série convergente. On appelle reste de la série* $\sum u_n$ *d'ordre* N *la quantité* $R_N=\sum_{n=N+1}^{+\infty}u_n$.

Exemple 8. *Déterminer le reste des séries convergentes vues dans l'exemple précédent.*

Propriété 9. *Soit* $\sum u_n$ *une série convergente. On note comme d'habitude* S_n *ses sommes partielles et* R_n *ses restes.*

1. $R_N=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n-S_N$
2. $\lim_{N\longrightarrow+\infty}R_N=0$.

1.5 Lien suite série

Propriété 10. *Soit* $\sum u_n$ *une série.*

Alors $u_0=S_0$, $u_n=S_n-S_{n-1}$ *pour* $n\geq 1$.

Remarque 11. *En convenant* $S_{-1}=0$, *on a* $u_n=S_n-S_{n-1}$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$.

Remarque 12. *En d'autres mots, toute suite est une série, toute série est une suite.*

Remarque 13. *En d'autre mots encore, l'application* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\longrightarrow\mathbb{K}^{\mathbb{N}},(u_n)\mapsto(S_n)$ *est un isomorphisme d'espace vectoriels.*

Propriété 14. *Si* $\sum u_n$ *converge, alors* $u_n\longrightarrow 0$.

Remarque 15. *En particulier, la contraposée nous apprend que* (u_n) *ne tend pas vers 0* $\implies$ $\sum u_n$ *diverge. C'est important : si* (u_n) *ne tend pas vers zéro, l'étude de la série s'arrête là.*

Définition 16. *Si* (u_n) *ne tend pas vers zéro, on dit que* $\sum u_n$ ***diverge grossièrement****.*

Exemple 17. *Que penser de la réciproque ? Se référer à l'exemple 4..*

1.6 Des propriétés qui font sens

Propriété 18. *1. On ne modifie pas la nature d'une série en changeant un nombre fini de ses termes (mais on modifie sa somme)*

2. *si* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent, et sont réelles, que* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
3. *si* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent,* $\sum u_n + v_n$ *converge et* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$
4. *Si* $\sum u_n$ *converge,* $\lambda \in \mathbb{K}$, $\sum \lambda u_n$ *converge et* $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
5. *L'ensemble des séries convergentes* E *forme un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
6. *L'application* $E \longrightarrow \mathbb{K}$, $(u_n) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est une forme linéaire.*

Remarque 19. *Dans les propriétés 3 et 4, on commence toujours par montrer que les séries convergent avant d'écrire leur somme : c'est quelque chose à garder en tête.*

Remarque 20. *La propriété 3 est loin d'être anodine. Elle dit en particulier que* $\boldsymbol{CV} + \boldsymbol{CV} = \boldsymbol{CV}$. *Que penser de :*

1. $\boldsymbol{CV} + \boldsymbol{DV}$*?*
2. $\boldsymbol{DV} + \boldsymbol{DV}$*?*

Quand on "sépare des séries", ce n'est pas anodin : il faut toujours s'assurer de la convergence des séries écrites.

2 Le cas des séries à termes positifs

Dans cette partie, on se place dans le cadre naturel, confortable et favorable des séries à termes positifs.

2.1 Les séries à termes positifs

Propriété 21 (Une remarque pertinente)**.** *Si* $(u_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$, (S_n) *est croissante.*

On a donc :

Propriété 22. *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes positifs.*

1. $\sum u_n$ *converge si et seulement si* (S_n) *est majorée.*
2. *Autrement, elle diverge et* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

2.2 Comparaison des séries à termes positifs

Propriété 23. *On suppose que* $0 \leq u_n \leq v_n$ ***APCR*** *(à partir d'un certain rang...) Alors :*

1. *Si* $\sum v_n$ *converge,* $\sum u_n$ *converge*
2. *Si* $\sum u_n$ *diverge,* $\sum v_n$ *diverge.*

Remarque 24. *C'est extremêment pratique. Par contre : ne pas oublier la positivité...*

Exemple 25. *Comparer* $\ln(1+x)$ *et* x*. En déduire la nature de* $\sum \frac{1}{n}$ *(série harmonique).*

Exemple 26. *Nature de* $\frac{1}{n^2}$ *? De* $\frac{\cos(n)+1}{n^2}$ *?*

Exemple 27. *On suppose que* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent, où* u_n *et* v_n *sont positives. Nature de* $\sum \max(u_n, v_n)$*?* $\sum \frac{u_n+v_n}{2}$ *?* $\sum \sqrt{u_n v_n}$ *?*

Propriété 28. *Si* $0 \leq v_n$ *APCR, que* $u_n \sim v_n$*, alors* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *ont même nature.*

Remarque 29. *C'est très pratique. Encore une fois, ne pas oublier la positivité (ou du moins le signe constant APCR, c'est la même chose).... Contre exemple à venir.*

Exemple 30. *Nature de* $\sum \frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$ *? De* $\sum sin^2(\frac{1}{\sqrt{n}})$ *?*

2.3 Convergence absolue

On veut dans cette partie voir comment l'étude d'une série se ramène à l'étude d'une série positive.

Définition 31. *On dit que* $\sum u_n$ *est absolument convergente dès que* $\sum |u_n|$ *est convergente.*

Propriété 32. $\sum u_n$ *absolument convergente* $\implies$ $\sum u_n$ *convergente. De plus,* $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ *(inégalité triangulaire).*

Remarque 33. *Lors de l'étude d'une série de signe variable ou complexe, on commence par étudier la nature de* $\sum |u_n|$*. On est alors ramenés à l'étude d'une série à terme positive, et on dispose de l'armada de résultats vus précédemment.*

Exemple 34. *Nature de* $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ *? De* $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ *?*

Définition 35 (Semi-convergence)**.** *Une série convergeant mais ne convergeant pas absolument est dite semi-convergente.*

Remarque 36. *Nous verrons des exemples dans la partie sur le critère des séries alternées. Ce cas n'est pas très favorable, comme ce sera vu en exercice.*

Propriété 37 (Critère de comparaison)**.** *Soit (v_n) une suite à termes **positifs** APCR, telle que $\sum v_n$ soit absolument convergente.*

- *Si $u_n = \boldsymbol{O}(v_n)$, alors $\sum u_n$ est absolument convergente.*
- *Si $u_n = \boldsymbol{o}(v_n)$, alors $\sum u_n$ est absolument convergente.*

Exemple 38. *Nature de $\sum \frac{\cos(n)}{n^2}$? De $\sum \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor e^{\cos(n)}}{n^3-n}$?*

Exemple 39. *Nature des séries de terme général $\frac{1}{n^2+3n-1}, \frac{n}{n^2+1}, sh(\frac{1}{n}), sh(\frac{1}{2^n}), \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$?*

2.4 Règle de d'Alembert

Propriété 40 (Règle de d'Alembert - HP MPSI, Programme de MP...)**.** *Soit $(u_n) \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \ell$.*

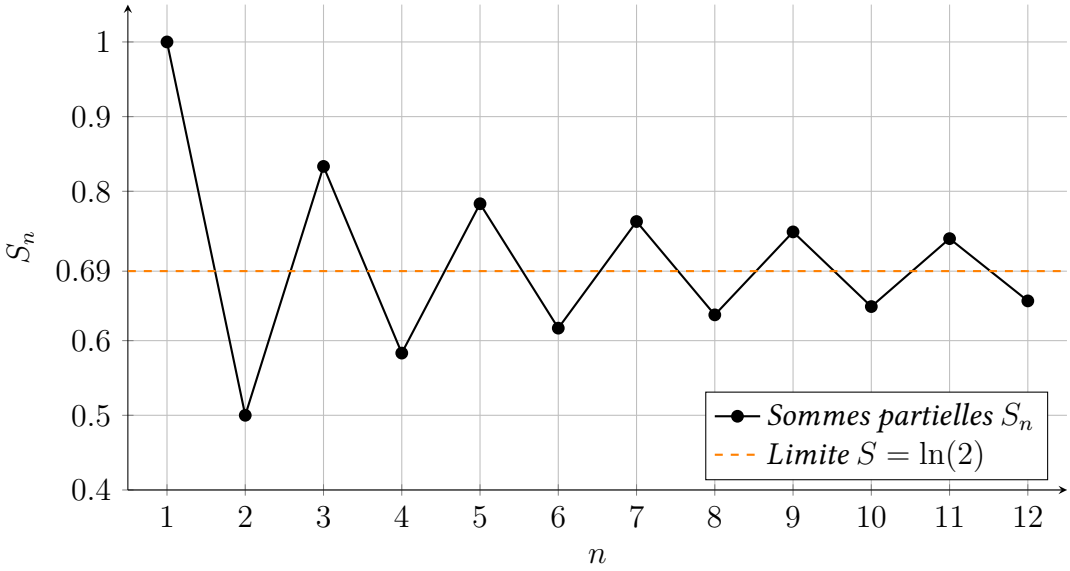
1. *Si $l < 1$, $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $l > 1$, $\sum u_n$ diverge.*
3. *Si $l = 1$, on ne peut pas conclure.*

Démonstration. Cas $\ell < 1$: APCR, $u_{n+1} \leq (\frac{1+l}{2})u_n$. Donc à partir d'un certain rang n_0, $u_n \leq \big(\frac{1+l}{2}\big)^{n-n_0} u_{n_0}$. Et $\sum \big(\frac{1+l}{2}\big)^n$ converge (pourquoi ?). Donc comparaison des séries à termes positifs... Cas $\ell > 1$: idem, mais dans l'autre sens. □

Exemple 41. $\frac{2^n}{n!}, \frac{n}{2^n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{\sqrt{n!}}$

3 Séries alternées

Exemple 42. *On représente ici $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.*



Propriété 43 (Critère des séries alternées)**.** *Soit (a_n) une suite décroissante de limite nulle. Alors $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ converge, et S_{2n} et S_{2n+1} sont deux suites adjacentes.*

Remarque 44. *En particulier, $S_{2n} \geq S \geq S_{2n+1}$. C'est utile.*

Exemple 45. *Appliquer ce théorème à $\sum \frac{(-1)^n}{n}$. Retrouver sa somme en remarquant que $\frac{1}{n} = \int_0^1 t^n dt$...*

Exemple 46. *Nature de $\sum \frac{(-1)^n}{n+\sin(n)}$? De $\sum \frac{(-1)^n}{n+5\sin(n)}$? De $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$?*

Remarque 47. *Proposez une remarque extrêmement pertinente pour le troisième exemple.*

4 Comparaison série intégrale

4.1 But

Lorsque l'on a affaire à une série de la forme $\sum f(n)$ où f est continue (ou du moins continue par morceaux sur tout segment...) et monotone le recours à une comparaison série intégrale permet d'obtenir un encadrement des sommes partielles. On obtient ainsi parfois des résultats de convergence, de divergence, et des équivalents des sommes partielles dans le cas divergent, et des restes dans le cas convergent. A défaut de donner un résultat général sous la forme d'un théorème, nous allons appliquer ceci sur quelques exemples, à savoir reproduire dans le bain.

Remarque 48. *Il est essentiel de faire un dessin systématiquement...*

4.2 Méthode

Ici, f est décroissante.

Propriété 49. *Pour tout $k \geq 1$, $f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt \leq f(k-1)$. Alors, on somme.. Et au choix :*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_{0}^{n} f(t)dt \leq \sum_{k=0}^{n} f(k)$$

ou :

$$\int_{1}^{n+1} f(t)dt) \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_{0}^{n} f(t)dt$$

Propriété 50 (Cas fréquent)**.** *Dans le cas très fâcheux où f est discontinue en zéro :*

$$\int_{1}^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq f(1) + \int_{1}^{n} f(t)dt$$

4.3 Des exemples

Exemple 51. *Montrer que $\sum \frac{1}{n}$ diverge, et donner un équivalent des sommes partielles (série harmonique).*

Exemple 52. *Etablir la convergence de $\sum \frac{1}{n^a}$ quand $a > 1$. Quid du cas $a \leq 1$? Il s'agit des séries de Riemann.*

Exemple 53. *Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} n\sqrt{n}$.*

5 Séries de référence

Propriété 54 (Série de Riemann)**.** *$\sum \frac{1}{n^a}$ converge ssi $a > 1$.*

Remarque 55. *Très, très, très utile. En particulier, si $n^2 u_n \longrightarrow 0$, $\sum u_n$ converge (théorème de comparaison). Très souvent, on fera un équivalent, un DL, ou autre, et on comparera à une série de Riemann. Il est impardonnable que de ne pas les avoir en tête.*

Propriété 56 (Série géométrique)**.** *$\sum q^n$ converge ssi $|q| < 1$, auquel cas $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.*

Propriété 57 (Série exponentielle)**.** *$\sum \frac{x^n}{n!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.*

Remarque 58. *Ca marche pour $z \in \mathbb{C}$. Ca arrive dans le chapitre "processus de sommations discrets"...*

6 Utilisation d'une série pour l'étude d'une suite

6.1 Premiers résultats

Propriété 59. *La série* $\sum u_{n+1} - u_n$ *est convergente ssi* (u_n) *converge. Dans ce cas, on a* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} - u_n = \lim u_n - u_0$.

Exemple 60 (Série harmonique)**.** *Montrer que* $H_n - \ln(n)$ *converge vers une constante* γ.

Question
$\gamma \in \mathbb{Q}? \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}?$

Element de réponse
On ne sait pas. γ est appelée constante d'Euler-Mascheroni.

6.2 Formule de Stirling

Propriété 61. $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

Démonstration. En deux temps : grâce aux séries, on montre que $\dfrac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$ converge vers une limite ℓ. Dans un second temps, avec les intégrales de Wallis, on montre que $\ell = \sqrt{2\pi}$. □

6.3 Exercice : Théorème de point fixe

On dit que $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ est $k-$contractante si elle est lipschitzienne de rapport $0 < k < 1$.

Propriété 62. *Sous ces hypothèses,* f *admet un unique point fixe* c*, et quelque soit le point de départ, la suite* f*-récurrente* $u_0 \in [0,1]$, $u_{n+1} = f(u_n)$ *converge vers* f.

Démonstration. On montre l'unicité dans le bain. Ensuite, $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$. Donc $\sum |u_{n+1} - u_n|$ converge. Donc $\sum u_{n+1} - u_n$ converge. Donc u_n converge. Donc c'est vers un point fixe car f est continue. (pourquoi ?) □

Remarque 63. *Assurez vous de savoir citer quel point du cours correspond à quel "donc"..*

6.4 Développement décimal d'un nombre réel

Définition 64. *Soit* $x \in \mathbb{R}$*. On note* (u_n) *la suite définie par* $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ *la suite des approximations décimales de* x *par défaut. On pose alors, pour* $n \geq, a_n = 10^n(u_n - u_{n-1}) = \lfloor 10^n x \rfloor - 10\lfloor 10^{n-1} x \rfloor$*. Alors :*

1. *Pour* $n \geq 1, a_n \in [|0,9|]$,

2. $x = \lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$

Propriété 65. *a_n est appelée la n-ème décimale de x après la virgule. La suite (a_n) est la suite des décimales de x. $\lfloor x \rfloor + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$ est appelé le développement décimal de x. Tout réel x est égal à son développement décimal.*

Remarque 66. *Un tel développement n'est pas unique (exemple ?). Pour le rendre unique, il faut parler de développement décimal propre.*

Définition 67. *Si la suite (a_n) converge vers 9, le développement est impropre. Si elle ne converge pas vers 9, on dit que le développement décimal est propre.*

Propriété 68. *Tout réel admet un unique développement décimal propre.*

Propriété 69. *$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

Démonstration. On suppose qu'il l'est, on écrit les développements décimaux, et un procédé diagonal permet de conclure. □

7 Compléments

7.1 Les séries de Bertrand

Exemple 70. *Nature de $\frac{1}{n\ln(n)}, \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}, \frac{\ln(n)}{n^3}, \frac{\ln(n)}{n^2}$. Donner un équivalent des sommes partielles dans l'un des cas de divergence.*

Propriété 71. *La série $\sum \frac{1}{n^a (ln(n))^\beta}$ converge ssi $a > 1$ ou $a = 1, \beta > 1$.*

7.2 Comparaison à $\frac{1}{n}$

A-t-on $\sum u_n$ converge $\implies u_n = o(\frac{1}{n})$? On suppose que $u_n = o(\frac{1}{n})$. A-t-on $\sum u_n$ converge ?

Maintenant, soit (u_n) telle que (u_n) décroit et $\sum u_n$ converge. Montrer que $u_n = o(\frac{1}{n})$.

7.3 Règle de Raabe-Duhamel

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs, telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$. La règle de d'Alembert ne permet pas de conclure... Mais :

- Si $\alpha > 1$, la série converge.
- Si $\alpha < 1$, la série diverge.

7.4 Sommation des relations de comparaison (programme MP)

Soit (a_n) et (b_n) deux suites. On suppose que (b_n) est positive apcr.

Propriété 72 (Cas convergent). *On suppose $\sum b_n$ convergente, et que $a_n = o(b_n)$. On note $A_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et $B_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$. Alors $A_n = o(B_n)$. De même si $a_n \sim b_n$, $a_n = O(b_n)$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que $|a_n| \leq \varepsilon b_n$ pour $n \geq n_0$. Alors $\forall n \geq n_0, |A_n| \leq \varepsilon B_n$. Idem pour les autres cas. □

Propriété 73 (Cas divergent). *On suppose $\sum b_n$ divergente, et que $a_n = o(b_n)$. On note $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$. Alors $A_n = o(B_n)$. De même si $a_n \sim b_n$, $a_n = O(b_n)$.*

Démonstration. Une fois que vous avez compris la précédente, celle-ci se fait toute seule. □

Remarque 74. *En bref, quand on se compare (équivalent, petit o, grand O) à une série à termes positifs APCR, alors on peut comparer les queues dans le cas convergent, et les sommes partielles dans le cas divergent.*

Exemple 75. *Proposer un équivalent, des queues ou des sommes partielles selon le cas de figure des séries de terme général : $\frac{1}{k^3 + k\sqrt{k}}$, $k!$, $\frac{1}{k!}$.*

Exemple 76 (Le lièvre et la tortue). *$a_n = \frac{1}{n}$, la tortue opiniatre, $b_n = (-1)^n$, le lièvre inconsistant. Morale de l'histoire ?*

Exemple 77 (Application à l'étude de suites récurrentes (mucha important)). *Soit $u_0 \geq 0$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$. Chercher α tel que $\frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha}$ converge. Puis établir la convergence de (u_n), et donner un équivalent. Se décline avec $u_{n+1} = \sin(u_n)$*

Exemple 78 (Série harmonique bis). *$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2}$.*

Démonstration. On a déjà vu $H_n = \ln(n) + \gamma + u_n$ où $u_n = o(1)$. De brefs calculs montrent que $v_n = u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{-1}{2n^2}$. On peut alors appliquer le théorème de sommation des relations de comparaison, et $u_n \sim \frac{1}{2n}$ □

7.5 Transformation d'Abel

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On note S_n les sommes partielles associées à (u_n). On s'intéresse à la convergence de $\sum u_n v_n$.

Propriété 79.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = S_n v_n - S_0 v_1 + \sum_{k=1}^{n-1} S_k (v_k - v_{k+1}).$$

Alors :

Propriété 80. *Si S_n est bornée, v_n décroissante de limite nulle, la série $\sum u_n v_n$ converge.*

Exemple 81. *Appliquer ce qui précède à* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{\sqrt{n}}$.

Quand faire une transformation d'Abel ?

- A-t-on affaire à une série de référence ?
- (u_n) tend-elle bien vers zéro ?
- Est-elle à termes positifs ? Si oui, on compare : à une série de Riemann, géométrique, on peut faire la règle de d'Alembert, comparer à une intégrale...
- Si elle n'est pas à signe constant, peut-on faire le critère des séries alternées ? Si oui, gagné.
- Sinon, peut être un DL ?
- Et sinon, une transformation d'Abel.

Remarque 82. *La pratique vous permettra de développer un véritable flair !*

7.6 Vers les séries de fonctions et les fonctions spéciales : les fonctions ζ et η

Définition 83. *On pose* $\displaystyle\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Propriété 84. *Son ensemble de définition est* $]1, +\infty[$.

Propriété 85 (Régularité)**.** *ζ est décroissante, convexe, continue sur son ensemble de définition.*

Propriété 86 (Limites, équivalents au bord)**.** $\zeta(s) \underset{s\longrightarrow 1^+}{\longrightarrow} \dfrac{1}{s-1}$, *et* $\zeta(s) \underset{s\longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$.

Définition 87. *On pose* $\displaystyle\eta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$.

Propriété 88. *Son ensemble de définition est* $]0, +\infty[$

Propriété 89 (Limite au bord)**.** *En 0 : η tend vers $\dfrac{1}{2}$. En quelque sorte :* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} = \frac{1}{2}$. *Ca fait sens. En $+\infty$: η tend vers 1.*

Propriété 90 (Lien avec ζ)**.** $\eta(x) = \zeta(x)(1-2^{1-x})$ *pour* $x > 1$. *On en déduit qu'elle est continue sur* $]1, +\infty[$. *Vous saurez montrer l'an prochain qu'elle l'est sur* $]0, +\infty[$.

Propriété 91. *En déduire un prolongement de ζ à $\mathbb{R}_+$. Que vaut $\zeta(0)$?*