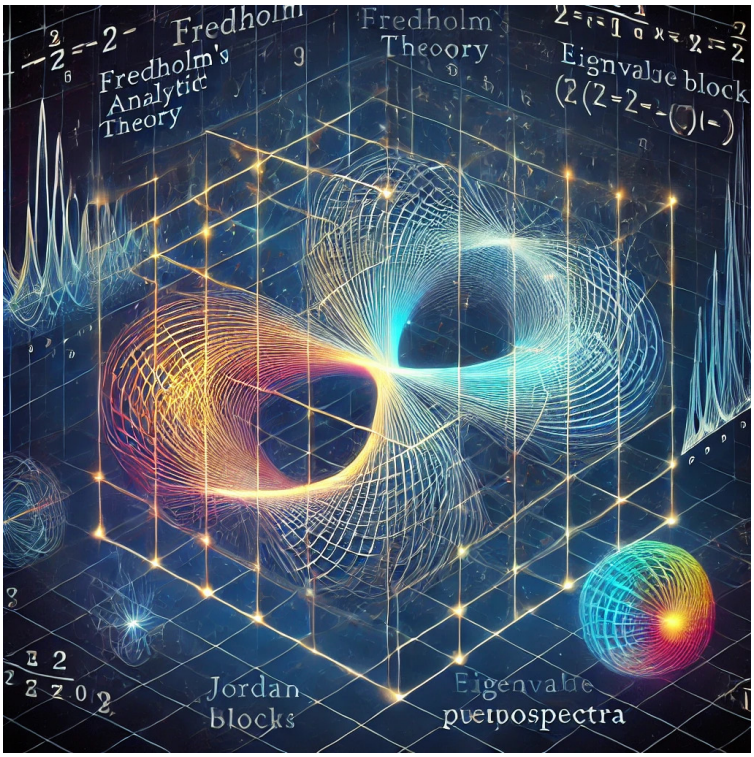
Université de Rennes

M2 Maths Fonda

Méthode de Grushin



MIANNAY Matteo

2024-2025

Supervisé par VU-NGOC San

Table des matières

1 Introduction **2**

1.1 Contexte mathématique 2

1.2 Premier exemple simple : convolution $L^2 - L^2$ 3

2 Spectre d'une petite perturbation d'un bloc de Jordan **4**

2.1 Mise en place d'un problème de Grushin, et premiers résultats 4

2.1.1 Notion de pseudo-spectre 5

2.1.2 Etude numérique 6

3 Opérateurs de Fredholm **7**

3.1 Définitions 7

3.2 Lien avec les problèmes de Grushin 8

3.3 Familles holomorphes d'opérateurs de Fredholm 9

3.3.1 Spectre d'un opérateur compact 10

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1 Contexte mathématique **2**
1.2 Premier exemple simple : convolution $L^2 - L^2$ **3**

1.1 Contexte mathématique

On s'intéresse dans ce séminaire à des opérateurs sur des espaces de Hilbert, en dimension infinie. Le but est de proposer des méthodes d'étude du spectre d'opérateurs non auto-adjoints, en remplacant l'opérateur qui nous intéresse par un système d'opérateurs.

L'idée derrière ce résultat est la formule des compléments de Schur : si

$$\begin{pmatrix} P & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E & E_+ \\ E_- & E_{+-} \end{pmatrix}$$

alors P est inversible si et seulement si si E_{+-} l'est. Dans ce cas, on a :

$$P^{-1} = E - E_+ E_{+-}^{-1} E_- \quad \text{et} \quad E_{+-}^{-1} = -R_+ P^{-1} R_-. \tag{1.1}$$

En s'inspirant de cette idée, au lieu d'étudier un opérateur $P : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$, on choisit un espace $\mathcal{H}_-$, un espace $\mathcal{H}_2$, un opérateur $R_- : \mathcal{H}_- \longrightarrow \mathcal{H}_2$, $R_+ : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_+$, et on appelle problème de Grushin le problème suivant :

$$\begin{cases} Pu + R_- u_- & = v \\ R_+ u & = v_+ \end{cases} \tag{1.2}$$

Si ce système est inversible, on définit alors E_+, E_-, E_{+-} par :

$$\begin{pmatrix} u \\ u_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & E_+ \\ E_- & E_{+-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ v_+ \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

On appelle en particulier E_{+-} l'hamiltonien effectif du système. Tout l'enjeu derrière cette théorie est donc de choisir les opérateurs R_- et R_+, ainsi que les espaces sur lesquels ils agissent de telle sorte à avoir un système inversible.

Propriété 1. *Si le problème est bien posé, alors R_+ et E_- sont surjectifs, et R_- et E_+ sont injectifs.*

Démonstration. D'après 1.2, on a automatiquement la surjectivité de R_+, on en déduit l'injectivité de R_-. En effectuant le produit dans l'autre sens, on récupère l'autre surjectivité et l'autre injectivité. □

1.2 Premier exemple simple : convolution $L^2 - L^2$

On fixe $K \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tel que $\hat{K} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, et on définit $P : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n), u \mapsto K * u$. On choisit alors $H_+ = H_- = L^2(\mathbb{R}^n)$, et on prend $R_- = -(2\pi)^n \mathcal{F}(-\cdot)$, l'opposé de la transformée de Fourier inverse, et R_+ la transformée de Fourier. On a alors affaire à un problème bien posé. En effet :

$$\begin{cases} Pu + R_- u_- &= v \\ R_+ u &= v_+ \end{cases} \iff \begin{cases} Pu + R_- u_- &= v \\ u &= -R_- v_+ \end{cases} \iff \begin{cases} R_- u_- &= v + R_- v_+ * K \\ u &= -R_- v_+ \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} u_- &= \hat{v} - v\hat{K} \\ u &= -R_- v_+ \end{cases} \iff \begin{pmatrix} u \\ u_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -R_- \\ -R_+ & E_{+-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ v_+ \end{pmatrix}$$

où E_{+-} est l'opérateur de multiplication par $\hat{K}$. Ce dernier est inversible si et seulement si $\hat{K}^{-1} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, c'est à dire $0 \notin \text{Essran}(\hat{K})$. On a donc montré que P est inversible si et seulement si $0 \notin \text{Essran}(\hat{K})$.

Chapitre 2

Spectre d'une petite perturbation d'un bloc de Jordan

Sommaire

2.1 Mise en place d'un problème de Grushin, et premiers résultats 4

2.1.1 Notion de pseudo-spectre 5

2.1.2 Etude numérique 6

2.1 Mise en place d'un problème de Grushin, et premiers résultats

On s'attend à ce que, en perturbant un bloc de Jordan J avec une petite matrice inversible, son spectre reste inclus dans un voisinage de zéro. Néanmoins, il n'en est rien. Pour étudier cela, nous allons utiliser un problème de Grushin, en dimension finie cette fois. On se donne $n \in \mathbb{N}^*$, et on pose J le bloc de Jordan supérieur de taille n. On note $e_1, ..., e_n$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On note $e_n = e_-$, et $e_1 = e_+$, pour pouvoir poser $R_- : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^n$, $u_- \mapsto e_-$, $R_+ : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}, u \mapsto \langle u \cdot e_+ \rangle$.

On s'intéresse alors au problème :

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - J & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

C'est un problème bien posé. En effet, on peut le résoudre à la main (on a vite quelque chose de triangulaire), et on trouve :

$$E_{+-}(\lambda) = \lambda^n, E_+ v_+ = v_+ e_+(\lambda), E_- v = \langle v \cdot e_-(\overline{\lambda}) \rangle, \tag{2.2}$$

où :

$$e_+(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}, \text{et } e_-(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^{n-1} \\ \vdots \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

La condition "être bien posée" est une condition ouverte. Dès lors, en perturbant un peu notre matrice J, par εQ, notre problème est toujours bien posé. On montre alors, que pour ε assez petit :

$$\begin{aligned} E^{\varepsilon}_{+-}(\lambda) &= E_{+-}(\lambda) - \varepsilon E_{-}(\lambda)(I_n - \varepsilon E(\lambda)Q)^{-1}E_{+}(\lambda) \\ &= E_{+-}(\lambda) + E_{-}(\lambda)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\varepsilon^k Q(E(\lambda)Q)^{k-1}E_{+}(\lambda). \end{aligned} \tag{2.3}$$

La convergence étant uniforme en λ sur tout disque fermé assez petit, on en déduit :

$$E^{\varepsilon}_{+-}(\lambda) = \lambda^n - \varepsilon\langle Qe_{+}(\lambda)\cdot e_{-}(\overline{\lambda})\rangle + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \tag{2.4}$$

Dès lors, on obtient que $J + \varepsilon Q - \lambda I_d$ est inversible dès que $E^{\varepsilon}_{+-}(\lambda)$ est non nul. Dès que $|\lambda| > 1$, on constate que λ ne sera pas valeur propre dès que ε sera assez petit. Si $|\lambda| < 1$, en choisissant n assez grand (à ε fixé), il n'y aura pas de spectre autour de λ. Il y a donc "convergence" du spectre vers $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.

2.1.1 Notion de pseudo-spectre

Nous allons définir la notion de $\varepsilon-$pseudo-spectre, laquelle correspond au spectre d'une $\varepsilon-$perturbation de notre matrice.

Définition 2. *On appelle ε-pseudo-spectre d'une matrice A l'ensemble suivant :*

$$\Lambda_{\varepsilon}(A) = \left\{ z \in \mathbb{C}, ||A - zI_d||^{-1} \geq \frac{1}{\varepsilon} \right\}$$

.

Remarque 3. *Ce sont les $z \in \mathbb{C}$ qui sont presque des valeurs propres.*

Propriété 4. *Le pseudo-spectre est "proche" du spectre dans le cas où A est normale. En effet, dans ce cas $\Lambda_{\varepsilon}(A) = \bigcup_{\lambda\in\sigma(A)} \{z \in \mathbb{C}, |z - \lambda| < \varepsilon\}$.*

Remarque 5. *On retrouve les propriétés de stabilité des matrices normales, ce qui illustre leur intérêt. Dans le cas de matrices non normales, on peut avoir un pseudo-spectre très éloigné du spectre normal, comme l'indique la propriété suivante.*

Propriété 6. *Soit $J(\lambda)$ un bloc de Jordan $N \times N$. Alors $B(\lambda, \varepsilon^{\frac{1}{N}}) \subset \Lambda_{\varepsilon}(J)$.*

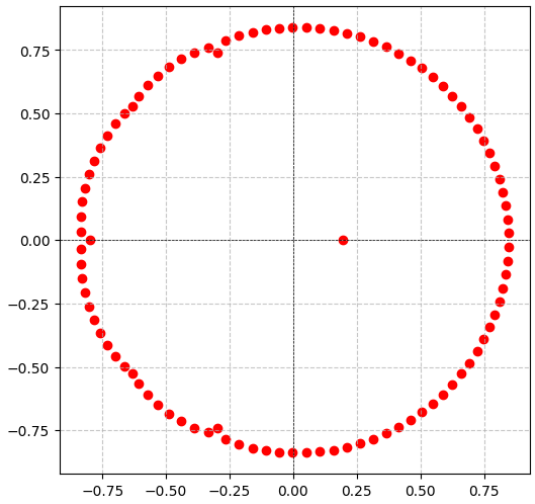
Démonstration. Par récurrence sur N, en considérant une matrice avec ω^{N+1} tout en bas à gauche, où $|\omega| \leq |\varepsilon|$. □

Remarque 7. *On peut affiner le calcul et montrer que $B(\lambda, (\varepsilon(1+\varepsilon)^{N-1})^{\frac{1}{N}}) \subset \Lambda_{\varepsilon}(J(\lambda))$.*

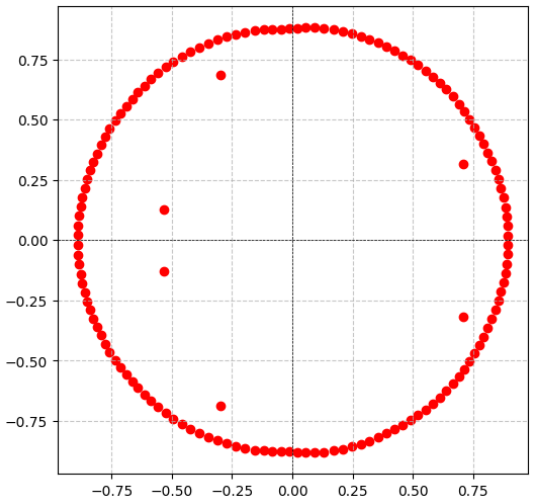
Ceci montre donc bien qu'en jouant sur ε et N, on peut avoir un pseudo-spectre assez largement éloigné de λ, ce que l'on avait illustré dans la partie précédente avec des problèmes de Grushin.

2.1.2 Etude numérique

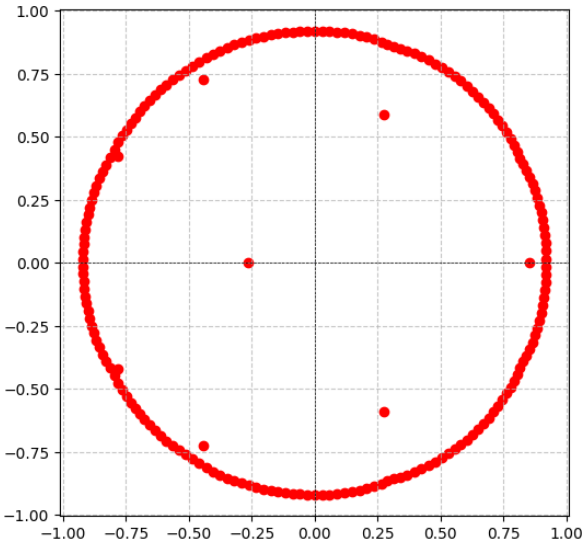
Nous allons ici étudier numériquement un exemple. On fixe n la dimension, $\varepsilon = 10^{-9}$ On part d'un bloc de Jordan $J = J(0)$, et d'une matrice de permutation de la forme : $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N & 0 \end{pmatrix}$
Où N est tirée suivant une loi normale de paramètres $(0, 1)$, et est carrée de taille $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$.
On regarde alors les valeurs propres de $J + \varepsilon Q$, en faisant varier les dimensions (on retire une matrice aléatoire à chaque simulation)



(a) Spectre de $J + \varepsilon Q$, avec $n = 100$.



(b) Spectre de $J + \varepsilon Q$, avec $n = 150$.



(c) Spectre de $J + \varepsilon Q$, avec $n = 200$.

Remarque 8. *On constate que certaines valeurs propres restent "enfermées" dans le disque. On pourrait penser à une anomalie, mais ce phénomène est très bien étudié et quantifié en terme probabilistes dans [2].*

Chapitre 3

Opérateurs de Fredholm

Sommaire

3.1 Définitions **7**
3.2 Lien avec les problèmes de Grushin **8**
3.3 Familles holomorphes d'opérateurs de Fredholm **9**
3.3.1 Spectre d'un opérateur compact 10

3.1 Définitions

Définition 9 (Opérateur de Fredholm)**.** *Soit $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ un espace de Hilbert. On dit qu'un opérateur $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ est de Fredholm si ker(T) et coker$(T) = \dfrac{\mathcal{H}_2}{Im(T)}$ sont de dimensions finie. On appelle alors codim(T) la dimension de son conoyau, et on appelle indice de T la quantité ind$(T) =$ dim ker$(T) -$ codim(T).*

Propriété 10. *Si T est de Fredholm, alors son image est fermée.*

Démonstration. On peut supposer T injectif. En effet, on considère autrement $\tilde{T} : \dfrac{\mathcal{H}_1}{\ker(T)} \longrightarrow \mathcal{H}_2$ l'endomorphisme induit par le quotient. Alors $\tilde{T}$ et T ont même image, donc quitte à remplacer T par $\tilde{T}$, on peut considérer T injectif. De plus, $\dfrac{\mathcal{H}_2}{\mathrm{Im}(T)}$ est de dimension finie, on peut en considérer une base $\overline{y_1}, ...\overline{y_d}$.

On définit alors une application linéaire sur l'espace $\mathcal{H}_1 \oplus \mathbb{C}^m$ à valeurs dans $\mathcal{H}_2$par :

$$\hat{T} : (x, k_1, ..., k_m) \mapsto T(x) + k_1 y_1 \dots k_m y_m.$$

C'est une application continue (on le vérifie à la main), et surjective (d'après le choix des y_i). Alors $\hat{T}$ est injectif. En effet, si $\hat{T}(x, k_1, ...k_m) = 0$ alors $T(x) + k_1 y_1 + ... + k_m y_m = 0$. Dès lors, en passant au quotient par $Im(T)$, on obtient $k_1\overline{y_1} + ... + k_m\overline{y_m} = 0$. Or, $\overline{y_1}, ..., \overline{y_m}$ est une base du conoyau, donc une famille libre, donc les k_i sont tous nuls, donc $T(x) = 0$ et $x = 0$

(on a supposé T injective). Donc $\hat{T}$ est injective. et surjective. Le théorème d'isomorphisme de Banach indique donc que c'est un isomorphisme bicontinu. Et $Im(T) = \tilde{T}^{-1}(\mathcal{H}_1 \times \{0\}^m)$, ce qui conclut. □

3.2 Lien avec les problèmes de Grushin

Nous avons vu précédemment une caractérisation de l'inversibilité d'un opérateur dans un problème de Grushin bien posé par l'inversibilité de son Hamiltonien effectif. Nous avons quelque chose de proche dans le cadre des opérateurs de Fredholm :

Propriété 11. *On suppose qu'on a $R_\pm$, choisis de sorte à ce que que le problème de Grushin associé à T un opérateur soit bien posé. Alors P est un opérateur de Fredholm si et seulement si E_{+-} l'est. Dans ce cas, on a alors ind$(P) =$ ind(E_{+-}).*

Démonstration. On rappelle que d'après la propriété 1, R_+, E_- sont surjectifs, and E_+ et R_- sont injectifs. Nous allons montrer que les noyaux et conoyaux de P et E_{+-} sont en bijection. Ils ont donc la même dimension (finie ou non), ce qui conclura.

Les équations $Pu = v, u_- = 0$ sont équivalentes à :

$$u = Ev + E_+v_+, \quad 0 = E_-v + E_{+-}v_+, \quad v_+ = R_+u. \tag{3.1}$$

En particulier, $E_v = -E_{+-}v_+$. On voit donc E_- comme un morphisme surjectif $\mathrm{Im}(P) \longrightarrow \mathrm{Im}(E_{+-})$. On peut alors définir un morphisme $\tilde{E}_- : \dfrac{\mathcal{H}_2}{\mathrm{Im}(P)} \longrightarrow \dfrac{\mathcal{H}_-}{E_{+-}}$ en passant au quotient. Ce morphisme sera également surjectif. De plus, il sera même injectif : si $E_-v \in \mathrm{Im}(E_{+-})$, alors d'après 3.1 $E_-v = -E_{+-}v_+ \in \mathrm{Im}(P)$, d'où l'injectivité.

Donc $\tilde{E}_-$ est une bijection entre les conoyaux de P et de $Im(E_{+-})$. De plus, $E_+ : \ker E_{+-} \longrightarrow \ker(P)$ est également une bijection de conoyau. En effet, si $u \in \ker(P)$ alors 3.1 donne $u = E_+v_+$ et $E_{+-}v_+ = 0$, donc l'application est surjective, et on a rappelé qu'elle était injective.

On a donc montré que les conoyaux et les noyaux de P et E_{+-} sont en bijection, ce qui conclut.

□

Dans le cadre d'un opérateur de Fredholm, on peut créer un problème de Grushin avec des espaces $\mathcal{H}_+$ et $\mathcal{H}_-$ de dimension finie. En effet :

Démonstration. On pose n_+ la dimension du noyau de P, et n_- la dimension du conoyau de P. On choisit alors des opérateurs $R_- : \mathbb{C}^{n_-} \longrightarrow H_2$ et $R_+ : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathbb{C}^{n_+}$ de telle sorte à ce que R_- soit injectif, et R_+ soit surjectif. De plus, on veut $R_-(\mathbb{C}^{n_-}) \cap \mathrm{Im}(P) = \{0\}$ et $\ker(R_+) \cap \ker(P) = \{0\}$. Tout ceci est possible de part la définition de n_- et n_+ : on peut choisir pour R_- un isomorphisme entre $\mathbb{C}^{n_-}$ et un supplémentaire de l'image, et pour R_+ un isomorphisme entre un supplémentaire du noyau et $\mathbb{C}^{n_+}$ Vérifions qu'on a ainsi bien un problème de Grushin bien posé.

$$\begin{cases} Pu + R_-u_- &= v \\ R_+u &= v_+ \end{cases} \iff \begin{cases} R_-u_- &= v - Pu \\ R_+u &= v_+ \end{cases}$$

Cas 1 : $v \in \mathrm{Im}(P)$. On prend alors pour u un antécédent de v. Alors $R_- u_- = 0$ et $u_- \in \ker(R_-) = \{0\}$ car R_- est injectif. Donc nécessairement $u_- = 0$. Montrons alors qu'on a une unique possibilité pour u. En effet, on a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Pu & = & v \\ R_+ u & = & v_+ \end{array} \right.$$

Si $\tilde{u}$ est une solution de $Pu = v$, alors $u = \tilde{u} + u_k$ où $u_k \in \ker(P)$. L'équation devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Pu & = & v \\ R_+ u_k & = & v_+ - R_+ \tilde{u} \end{array} \right.$$

Mais la restriction de R_+ à $\ker(P)$ est injective. donc on a une seule possibilité pour u_k, ce qui conclut.

Cas 2 : $v \notin \mathrm{Im}(P)$. La condition $\mathrm{Im}(R_-) \cap \mathrm{Im}(P) = \{0\}$ fait de $\mathrm{Im}(R_-)$ un supplémentaire de $\mathrm{Im}(P)$. Dès lors, $R_- u_- = v - Pu \iff R_- u_- = Ra_v + Pb_v - Pu$ où $v = R_- a_v + P b_v$ est la décomposition unique de v dans la somme directe $\mathrm{Im}(P) \oplus \ker(P)$. Donc nécessairement, $u = b_v + x_k$ où $x_k \in \ker(P)$, et $u_- = a_v$. La deuxième équation et l'injectivité de la restriction de R_+ à $\ker(P)$ montre l'unicité de u, et conclut ce second cas. □

Sous cette hypothèse, l'hamiltonien effectif E_{+-} est défini : $\mathbb{C}^{n_-} \longrightarrow \mathbb{C}^{n_+}$, et son indice est $n_+ - n_-$ (le même que P).

3.3 Familles holomorphes d'opérateurs de Fredholm

Nous allons ici démontrer le théorème suivant, grâce à ce qui précède :

Théorème 12. *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. On considère $z \mapsto A(z)$ une famille holomorphe d'opérateur de Fredholm. On suppose que $A(z_0)^{-1}$ existe en un point $z_0 \in \Omega$. Alors $z \in \Omega \mapsto A(z)^{-1}$ est une famille méromorphe d'opérateurs.*

Démonstration. L'ouvert étant connexe, l'indice étant continu, l'indice de $A(z)$ est nul pour tout $z \in \Omega$ (car il existe un point en lequel $A(z)$ est inversible donc d'indice nul). On part de $z_0 \in \Omega$, $V(z_0)$ un voisinage de z_0. On forme alors un système de Grushin associé à $A(z_0)$. On a alors deux opérateurs R_+ et $R_-(z_0)$, construits de sorte à avoir les espaces associés de dimension finie comme précédemment. Donc ici $n_+ = n_-$, et $E_{+-}(z)$ est une matrice carrée. Alors si $V(z_0)$ est suffisamment petit, les mêmes opérateurs forment un problème de Grushin bien posé pour $z \in V(z_0)$. Attention : les opérateurs $E_{\pm}(z)$ associés varient selon $z \in V(z_0)$. Néanmoins, ce sont tous des matrices carrées de même dimensions.

L'inversibilité de $A(z), z \in V(z_0)$ équivaut à l'inversibilité de $E_{+-}(z)$, qui est une matrice $n \times n$, laquelle équivaut à $\det(E_{+-}(z)) \neq 0$. $z \longmapsto \det(E_{+-}(z))$ est de plus une fonction holomorphe sur $V(z_0)$.

On note $S = \{z \in \Omega, A(z)$ *n'est pas inversible* $\}$. On s'intéresse à $V = \mathring{A}$ dont nous allons montrer qu'il est vide. Nous allons pour cela procéder par connexité. Par définition c'est bien un ouvert. Montrons qu'il est fermé. Soit (z_n) une suite de V de limite $z_0 \in \Omega$. On s'intéresse

alors à $V(z_0)$. $A(z_0)$ n'est alors pas inversible. Donc $\det(E^{z_0}_{+-}(z_0)) = 0$, et pour n grand, $z_n \in V(z)$ et donc $\det(E^{z_0}_{+-})(z_n) = 0$, mais $\det(E^{z_0}_{+-})$ est holomorphe sur $V(z_0)$ donc nulle d'après le principe des zéros isolés, donc $V(z_0) \subset S$ et donc $z_0 \in V$. Donc V est bien fermé. Donc V est ouvert et fermé dans Ω. Soit $V = \Omega$, auquel cas $S = \Omega$ mais on a supposé qu'il existe un pojnt $z \in \Omega$ en lequel $A(z)$ est inversible. Donc $V = \emptyset$.

Maintenant, si z_0 est tel que $A(z_0)$ n'est pas inversible, on se place sur $V(z_0)$. $\det(E^{z_0}_{+-})$ est nul en z_0, mais comme $V = \emptyset$, ce n'est une application nulle. Par holomorphie, ses zéros sont isolés. De plus, la formule $A(z)^{-1} = E(z) - E_+(z)E_{+-}(z)^{-1}E_-(z)$ montre bien que $A(z)$ est méromorphe sur $V(z_0)$ (les singularités sont bien des pôles d'après la formule pour l'inverse d'une matrice, et ils sont isolés d'après ce qui précède).

On a donc montré que A est méromorphe sur tout les $V(z)$. On dispose ainsi d'un recouvrement de Ω par des ouverts sur lesquels A est méromorphe.

On peut extraire de ce recouvrement un recouvrement dénombrable localement fini (c'est à dire que tout $z \in \Omega$ appartient à un nombre fini de Ω_j). (Pour ce faire, on construit un recouvrement avec les traces des $B(x_i, \frac{1}{2^j})$ sur les $V(z)$, où les (x_i) désignent une énumération des rationnels...)

Les singularités de $z \longmapsto A(z)$ sur Ω demeurent des pôles, et elles sont bien isolées car elles le sont sur chaque ouvert de notre recouvrement localement fini. Ceci achève la preuve.

□

Théorème 13. *Soit T un opérateur de Fredholm. Alors son spectre est discret.*

Démonstration. On applique ce qui précède à $(T - zI_d)^{-1}$. Les pôles de cette famille méromorphe d'opérateurs correspondent exactement au spectre de T. □

Ce résultat a des applications en physique mathématique, et en théorie des EDP. Par exemple, dans le cas d'une équation de Schrodinger à potentiel ($-\nabla u + Vu = \lambda u$), sous de bonnes hypothèses sur V (borné par exemple), ou sur Ω (borné également par exemple), l'opérateur $-\nabla + V - \lambda I$ est de Fredholm. Dès lors, les niveaux d'énergie forment un ensemble discret.

Une autre application, plus terre à terre ici, est une application aux opérateurs compacts.

3.3.1 Spectre d'un opérateur compact

Propriété 14. *Si K est compact, $I + K$ est Fredholm d'indice zéro.*

Démonstration. On suppose que K est compact. Soit (u_n) une suite bornée. K est compact donc on peut suppose qque $K(u_n)$ converge. Dès lors, si on suppose que $I + K(u_n)$ converge, alors u_n converge. Cela montre que $I + K$ est semi-Fredholm (c'est à dire noyau de dimension finie, ici car boule unité du noyau compacte, et d'image fermée (on le vérifie en travaillant sur un supplémentaire du noyau, et en utilisant la propriété : "Si il existe $c > 0$ tel que $||Ax|| \geq c||x||$ alors A est injectif d'image fermée). Enfin, l'image étant fermée, $\dim(\textit{coker}(K + I_d)) = \dim((I_d + K)(E))^\perp = \dim(\textit{ker}(I_d + K^*)$. Mais K^* est compact car K l'est, l'alternative

de Fredholm indique donc que cette dimension est fini, ce qui montre bien que $I + K$ est Fredholm. Pour l'indice : on utilise la continuité de l'indice sur $t \in [0, 1] \longmapsto I + tK$.

□

Dès lors, on a remontré la caractérisation du spectre d'un opérateur compact :

Théorème 15. *Soit K compact. Alors son spectre est constitué :*

1. *De 0 (en dimension infinie)*
2. *D'une ensemble discret de valeurs propres dans $\mathbb{C}^*$ (ce qui ne les empêche pas de tendre vers 0)*

Démonstration. $(K + zI)_{i\neq 0}$ est une famille holomorphe d'opérateurs de Fredholm, $\mathbb{C}^*$ est un ouvert connexe, d'après ce qui précède $z \mapsto (K + zI)^{-1}$ est méromorphe : d'où la nature discrete du spectre dans $\mathbb{C}^*$. D'après l'alternative de Fredholm, les éléments du spectre non nuls sont des valeurs propres. En dimension infinie, 0 est valeur propre car autrement K est injectif, donc surjectif car compact, donc K^{-1} l'est, donc I_d l'est, donc la boule unité de H est compacte, donc H est de dimension finie.

□

On a en fait :

Théorème 16. *Soit K un opérateur compact.*

1. *0 est valeur propre de K.*
2. *Le spectre de K est soit fini, soit une suite de limite nulle.*

Démonstration. Le premier point a été vu. Pour le second : le spectre est borné par $||K||$. De plus, si on regarde $\sigma(K) \cap \left\{ x \in \mathbb{C}, |x| \geq \frac{1}{n} \right\}$, c'est un ensemble fini (autrement il aurait un point d'accumulation). On en déduit donc que le spectre est au plus dénombrable. Si il est fini, c'est bon. Sinon, toute suite bornée admettant une valeur d'adhérence, cette dernière ne peut être que 0 (car les éléments non nuls du spectre sont isolés). Donc les éléments du spectre, que l'on note (λ_n), forment une suite bornée ayant une seule valeur d'adhérence. Ceci conclut. □

Exemple 17. *Si V est une fonction continue coercive, alors $-\Delta + V$ est un opérateur à résolvante compacte. On peut alors montrer que son spectre est discret.*

Bibliographie

[1] *Elementary linear algebra for advanced spectral problems* , J. Sjoestrand, M. Zworski.

[2] *Explicit bounds for the pseudospectra of various classes of matrices and operator*, Gong, Meyerson, Meza, Ward, Stoiciu.

[3] *Spectra and pseudospectra : the behavior of nonnormal matrices and operators.*, Trefethen, Embree.

[4] *A guide to spectral theory*, Cheverry, Raymond.

[5] *Semiclassical analysis*, Zworwski.